Lecture 1 - Introduction & Preliminaries

赵尉辰

南开大学 统计与数据科学学院

目录

目录

本人信息

- 授课老师：赵尉辰
- 电子邮箱：zhaoweichen@nankai.edu.cn
- 个人主页：https://my.nankai.edu.cn/stat/zwc/list.htm
- 研究领域：

  采样与扩散模型；
  图深度学习方法及应用；
  深度学习理论。

课程信息

- 课程主页：
  https://weichenzhao1996.github.io/WeichenZhao.io/STAT0041-2025.html

- 教材：Lecture Note

  参考书：
  - 钱忠民，应坚刚，随机分析引论
  - Bernt Øksendal，Stochastic differential equations: an introduction with applications
  - 高洪俊，石洋洋，乔会杰，随机微分方程导论
  - 龚光鲁，随机微分方程及其应用概要
  - 黄志远，随机分析学基础（第二版）

- 教学方式：板书为主，Slides 为辅，智慧小雅

- 考核方式：
  - 5 次平时作业 30%
  - 出勤 10%
  - 期末考试 60%

课程简介

- 课程定位：随机分析导论/应用随机分析

  概率论专业/涉及随机分析工具的交叉学科 (人工智能、金融数学、随机优化)

- 预备课程：概率论、随机过程、(实分析、泛函分析)

- 随机分析的应用：建模随机现象

  建模粒子的运动：统计物理、化学；
  建模金融产品的价格波动：金融数学；
  建模数据分布的演化：人工智能。

课程简介

- (数学/实) 分析："好"的函数 (光滑/可测)$\rightarrow$ 微积分 (黎曼/勒贝格)$\rightarrow$ 微分方程

  随机分析："好"的随机过程 $\rightarrow$ 随机微积分 $\rightarrow$ 随机微分方程

- 主要内容：

  概率论基础

  鞅论初步

  布朗运动

  Itô 随机积分

  随机微分方程

  随机分析在人工智能中的应用

目录

样本空间

Motivation

概率论是研究随机现象确定性规律的理论。为了使用数学工具，我们首先要建立随机现象的数学模型。

在概率论中，我们假定随机试验(random trial) 可以在相同条件下重复地进行，每次试验的结果可能不止一个，并且能事先确定试验的所有可能结果，但每次试验的结果事先又不可预测。这样一组定义明确的可能结果，称为样本空间。

定义 1 (样本空间)

把随机试验每一个可能的结果称为一个样本点 *(sample point)*, 通常用 ω 表示，所有可能的结果组成的集合称为样本空间*(sample space)*, 通常用 Ω 表示.

考虑先后掷两次硬币可能出现的结果是：(正, 正)(正, 反)(反, 正)(反, 反)，把这四个结果作为样本点构成这个随机试验样本空间。

事件

事实上，我们感兴趣的是试验中出现的一些事，比如，先后掷两次硬币这个随机试验中我们可能感兴趣“两次出现的结果相同”这件事，它是指 (正, 正)(反, 反) 这两个样本点之一出现。这些“事”是样本点的集合，称为事件。

定义 2 (事件)

事件 *(event)* 定义为样本点的某个集合. 称某事件发生当且仅当它所包含的某个样本点出现。

我们把样本空间 Ω 本身也作为一个事件。每次试验必然有 Ω 中的某个样本点出现，即 Ω 必然发生。因此, 我们称 Ω 为必然事件 (certain event)。我们把空集 $\emptyset$ 也作为一个事件，每次试验中, 它都不发生, 因此, 称为 $\emptyset$ 为不可能事件 (impossible event)。

事件

我们需要能够用简单的事件来刻画复杂的事件，这是由集合的运算实现的：

- 称事件 A 发生意味着事件 B 发生, 如果 $A \subset B$.
  $A = B \iff A \subset B$ 且 $B \subset A$;
- 由所有不包含在事件 A 中的样本点所组成的事件称为事件 A 的对立事件, 记为 A^c;
- 用 $A \cap B$ 或者 AB 表示 A 和 B 都发生;
- 用 $A \cup B$ 表示事件 A 和 B 至少有一个发生;
- 用 $A \backslash B$ 表示事件 A 发生，但是 B 不发生。

事件域

如果我们对事件 A 感兴趣，那么我们应该知道与 A 相关的事件，也就是我们需要找出通过集合运算得到的事件。所有这些事件的集合，称为事件域。

定义 3 (事件域)

$\mathscr{F}$ 是由样本空间 Ω 的一些子集组成的集合，称为事件域*(event field)* 如果满足*:*

(1) 非空 $\mathscr{F} \neq \emptyset$*;*

(2) 对补运算封闭 $A \in \mathscr{F} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{F}$*;*

(3) 对可列并运算封闭 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$*.*

事件域

事件与事件域是紧密联系的，在表述事件时，必须明确是在哪个事件域中。

例 1

考虑有两个正方形盒子，被分成四个区域，其中盒子 *1* 盒盖是完全透明的，盒子 *2* 的乙和丁区域是不透明的。考虑盒子中均有一个小球可以滚动，随意晃动盒子，小球停止运动后，随机地停留在这四块区域中的某块中 *(*假设处于理想状态，不考虑小球处于分割线*)*。

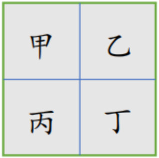

图 1

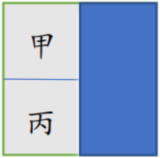

图 2

事件域

这两个随机试验的样本空间均为 $\Omega = \{$甲, 乙, 丙, 丁$\}$。

但是试验 1 的事件域 $\mathscr{F}_1$ 为 Ω 的全体子集组成的集合，其中共有 16 个事件。对于试验 1 的每一个结果 ω，对于 Ω 的每个子集 A, 总能判断出 ω 是否属于 A, 也就是说每次实验后, 总能知道事件 A 是否发生。

试验 2 的事件域

$$\mathscr{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{\text{甲}\}, \{\text{丙}\}, \{\text{甲, 丙}\}, \{\text{乙, 丁}\}, \{\text{甲, 乙, 丁}\}, \{\text{丙, 乙, 丁}\}\},$$

只包含了 8 个事件。对于试验的某些结果, 虽然可以看到小球停留在不透明的区域, 但是我们不能判断此时小球是否在“乙”区域, 也就是说, 不知道 $\{$乙$\}$ 是否发生了。因此, 对于事件域 $\mathscr{F}_2$, Ω 的子集 $\{$乙$\}$ 就不是事件。同样的, $\{$丁$\}$ 和 $\{$甲, 乙$\}$ 等也不是事件。

概率

搞清楚了我们感兴趣的事件的集合，我们现在需要量化它发生的可能性，这就需要引入概率。

定义 4 (概率)

称集合函数 P 是事件域 $\mathscr{F}$ 上的概率测度*(Probability measure)*，如果

(1) 非负性：$\mathrm{P}(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathscr{F}$;

(2) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0,\ \mathrm{P}(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性*:* 对于不相交的集合 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1, 2, \cdots$

$$\mathrm{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n).$$

概率空间

总结一下，我们需要三个部分来建立随机现象的数学模型：

- 随机试验的样本空间 Ω，它是包含了这个试验所有可能结果的非空集合；
- 事件域 $\mathscr{F}$，它是我们感兴趣的事件，以及这些事件通过运算得到的事件的全体；
- 概率 P，它量化了事件发生的可能性。

定义 5 (概率空间)

我们称数学三元组 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间(*Probability space*)，其中 Ω 是非空集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的一个事件域，P 是 $\mathscr{F}$ 上的概率。

补充概念

测度空间

在测度论中，满足事件域定义的集合族 $\mathscr{F}$ 也称为σ-代数 (σ-algebra) 或者 σ-域，$(\Omega, \mathscr{F})$ 称为一个可测空间(measurable space)。

可以定义 $\mathscr{F}$ 上的集合函数 μ 满足非负性和可列可加性，称为 $\mathscr{F}$ 上的测度(measure)，$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 称为测度空间(measure space)。

注. 概率空间是一类特殊的测度空间。

生成 σ-代数

设 $\mathscr{C}$ 是 Ω 的非空集族，称 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{C}$ 生成的 σ-代数，如果：

(1) $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$;

(2) 对任意 Ω 上的 σ-代数 $\tilde{\mathscr{S}}$，如果 $\mathscr{C} \subset \tilde{\mathscr{S}}$，那么 $\mathscr{S} \subset \tilde{\mathscr{S}}$;

即 $\mathscr{S}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-代数，记为 $\sigma(\mathscr{C})$。

注. 对任意非空集族 $\mathscr{C}$，$\sigma(\mathscr{C})$ 是存在且唯一的。

补充概念

测度空间

在测度论中，满足事件域定义的集合族 $\mathscr{F}$ 也称为σ-代数 (σ-algebra) 或者 σ-域，$(\Omega, \mathscr{F})$ 称为一个可测空间(measurable space)。

可以定义 $\mathscr{F}$ 上的集合函数 μ 满足非负性和可列可加性，称为 $\mathscr{F}$ 上的测度(measure)，$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 称为测度空间(measure space)。

注. 概率空间是一类特殊的测度空间。

生成 σ-代数

设 $\mathscr{C}$ 是 Ω 的非空集族，称 $\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{C}$ 生成的 σ-代数，如果：

(1) $\mathscr{C} \subset \mathscr{S}$;

(2) 对任意 Ω 上的 σ-代数 $\tilde{\mathscr{S}}$，如果 $\mathscr{C} \subset \tilde{\mathscr{S}}$，那么 $\mathscr{S} \subset \tilde{\mathscr{S}}$;

即 $\mathscr{S}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-代数，记为 $\sigma(\mathscr{C})$。

注. 对任意非空集族 $\mathscr{C}$，$\sigma(\mathscr{C})$ 是存在且唯一的。

例子

例 2 (Borel σ-代数)

记 $\mathbb{R}$ 上左开右闭区间组成的集合族为

$$\mathscr{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

称 $\mathscr{C}$ 的生成 σ-代数 $\sigma(\mathscr{C})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的*Borel σ-代数*，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为*Borel 集*。

注 1. 事实上，对于左闭右开区间组成的集合族、开区间组成的集合族以及闭区间组成的集合族都生成 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

注 2. 上述定义可以自然地扩展到 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

注 3. 假设 f 是一非负可积的函数满足 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. 对于任意的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 定义

$$\mathrm{P}(B) \triangleq \int_B f(x)\,dx,$$

则 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P})$ 是一个概率空间, 并称 f 为概率测度 P 的密度函数。

例子

例 2 (Borel σ-代数)

记 $\mathbb{R}$ 上左开右闭区间组成的集合族为

$$\mathscr{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

称 $\mathscr{C}$ 的生成 σ-代数 $\sigma(\mathscr{C})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的*Borel σ-代数*，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为*Borel 集*。

注 1. 事实上，对于左闭右开区间组成的集合族、开区间组成的集合族以及闭区间组成的集合族都生成 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

注 2. 上述定义可以自然地扩展到 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

注 3. 假设 f 是一非负可积的函数满足 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. 对于任意的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 定义

$$\mathrm{P}(B) \triangleq \int_B f(x)\,dx,$$

则 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P})$ 是一个概率空间, 并称 f 为概率测度 P 的密度函数.

例子

例 2 (Borel σ-代数)

记 $\mathbb{R}$ 上左开右闭区间组成的集合族为

$$\mathscr{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

称 $\mathscr{C}$ 的生成 σ-代数 $\sigma(\mathscr{C})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的*Borel σ-代数*，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为*Borel 集*。

注 1. 事实上，对于左闭右开区间组成的集合族、开区间组成的集合族以及闭区间组成的集合族都生成 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

注 2. 上述定义可以自然地扩展到 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

注 3. 假设 f 是一非负可积的函数满足 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. 对于任意的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 定义

$$\mathrm{P}(B) \triangleq \int_B f(x)\,dx,$$

则 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P})$ 是一个概率空间, 并称 f 为概率测度 P 的密度函数.

例子

例 2 (Borel σ-代数)

记 $\mathbb{R}$ 上左开右闭区间组成的集合族为

$$\mathscr{C} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

称 $\mathscr{C}$ 的生成 σ-代数 $\sigma(\mathscr{C})$ 为 $\mathbb{R}$ 上的*Borel σ-代数*，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为*Borel 集*。

注 1. 事实上，对于左闭右开区间组成的集合族、开区间组成的集合族以及闭区间组成的集合族都生成 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

注 2. 上述定义可以自然地扩展到 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

注 3. 假设 f 是一非负可积的函数满足 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$. 对于任意的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, 定义

$$\mathrm{P}(B) \triangleq \int_B f(x)\, dx,$$

则 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P})$ 是一个概率空间, 并称 f 为概率测度 P 的密度函数。

例子

例 3 (Dirac 测度)

给定点 $x \in \mathbb{R}^n$, 对任意的集合 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, 定义

$$\delta_x(B) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

则 $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \delta_x)$ 是一个概率空间, 称 δ_x 为在点 x 处的*Dirac 测度*。

目录

随机变量

Motivation

现实中，随机现象纷繁复杂，相应的样本空间千差万别。有些可以用数来表示，比如测量误差，有些则不行，比如掷一枚硬币。

我们希望能将这些试验结果用“数”来表示，最简单的办法就是把样本点映射到一个实数上，即 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$。但是我们知道，描述事件时需要明确所对应的事件域，这引入了随机变量的概念。

定义 6 (随机变量)

给定概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$, 随机变量 *(random variable, r.v.)* 是一个函数 $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足：对于所有的 $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}$.

注. 测度论中，这样的函数称为可测函数 (measurable function)。

基本概念

定义 7 (概率分布)

设 ξ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的随机变量，$\mathscr{B}(\mathbb{R})$ 上的概率测度

$$\mathrm{P}_\xi : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], \quad \mathrm{P}_\xi(A) := \mathrm{P} \circ \xi^{-1}(A),\ \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

称为 ξ 的概率分布(*probability distribution*).

注 1. 若两个随机变量 ξ 和 η 具有相同的概率分布，则称 ξ 和 η 是同分布的，ξ 和 η 可以是两个不同概率空间上的随机变量，但它们可以有相同的分布。

注 2. $F(x) = \mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \le x), x \in \mathbb{R}$ 称为 ξ 的分布函数 (distribution function).

数学期望

定义 8 (Expectation)

设 ξ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的随机变量, 如果 $\int_\Omega |\xi(\omega)|\mathrm{dP}(\omega) < \infty$, 则称 ξ 的数学期望存在, 定义

$$\mathbb{E}[\xi] \triangleq \int_\Omega \xi(\omega)\mathrm{dP}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{dP}_\xi(x)$$

为 ξ 的数学期望*(mathematical expectation)*.

注. $\int_\Omega \xi(\omega)\mathrm{dP}(\omega)$ 为 Lebesgue 积分。直观上，$\xi(\omega)$ 的值落入 x 的 $\epsilon-$ 邻域 $[x-\epsilon, x+\epsilon)$ 的概率为 $\mathrm{P}(\omega : \xi(\omega) \in [x-\epsilon, x+\epsilon))$，近似作为 $\xi(\omega)$ 在 x 取值的权重。将 $\xi(\omega)$ 的值域划分成之多可列个这样互不相交的区间 $[x_i-\epsilon, x_i+\epsilon)$，那么，$\xi(\omega)$ 的加权平均为

$$\sum_i x_i \mathsf{P}\big(\omega : \xi(\omega) \in [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)\big).$$

令 $\epsilon \to 0$，上式的极限就是 Lebesgue 积分 $\int_\Omega \xi(\omega)\mathrm{dP}(\omega)$.

目录

随机过程

定义 9 (随机过程)

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 为概率空间，$(E, \mathscr{E})$ 为可测空间，指标集 $T \subset \mathbb{R}$，若对任何 $t \in T$，映射

$$X_t : \Omega \mapsto E,$$

可测，则称 $\{X_t : t \in T\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上的取值于 E 的随机过程，称 $(E, \mathscr{E})$ 为其“相空间”或“状态空间”，称 T 为其“时间域”。

注. 简单来说，随机过程 $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ 是一族随机变量，若指标集 T 是可数集，则我们称 $\{X_t\}$ 为离散时间的随机过程，若 T 是连续统，则称 $\{X_t\}$ 为连续时间的随机过程。

随机过程

定义 10 (样本轨道)

设 $\{X_t : t \in T\}$ 是一个取值于 E 的随机过程。$\{X_t\}$ 的样本轨道*(Sample path)* 定义为在固定 $\omega \in \Omega$ 情况下的映射

$$T \ni t \mapsto X(t, \omega).$$

即，X 样本轨道的集合是那些由 $\omega \in \Omega$ 索引的，从时间集合 T 到状态空间 E 的映射的集合

$$\{t \mapsto X_\omega(t)\}_{\omega \in \Omega}$$

随机变量的收敛

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 为一个概率空间，$\{X_n\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ 上随机变量序列，

(1) 依概率收敛(Convergence in probability)：记为 $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, 如果对于 $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) = 0.$$

(2) 几乎处处收敛(Almost sure convergence)：记为 $X_n \to X,\ a.s.$, 如果

$$\mathrm{P}(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

(3) 依分布收敛(Convergence in distribution)：记为 $X_n \xrightarrow{d} X$，如果对于任意有界连续函数 f

$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{dP}_{X_n} = \int f \mathrm{dP}_X.$$

(4) L^p 收敛(Convergence in L^p)：记为 $X_n \xrightarrow{L^p} X$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p \triangleq \lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}|X_n - X|^p)^{1/p} = 0.$$

随机变量的收敛[1]

$$
\begin{array}{ccccc}
\xrightarrow{L^r} & \underset{r>s\geq 1}{\Rightarrow} & \xrightarrow{L^s} & & \\
 & & \Downarrow & & \\
\xrightarrow{a.s.} & \Rightarrow & \xrightarrow{P} & \Rightarrow & \xrightarrow{d}
\end{array}
$$

[1] 1.4 随机序列的收敛性. 应坚刚. 随机过程基础 (第三版). 复旦大学出版社. 2024

目录

$\sigma-$ 代数流

Motivation

由于现实中充满不确定性，人们不能精确预测未来，但人们总是希望通过已知的过去和现在的信息来帮助预测未来。

如何在概率空间的框架下来定义这种“信息”？这需要引入 $\sigma-$ 代数流。

定义 11 ($\sigma-$ 代数流)

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的$\sigma-$ 代数流 *(filtration)* 是一族 $\mathscr{F}$ 的子 $\sigma-$ 代数 $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$，由指标集 $T = \mathbb{R}^+ \cup \{0, \infty\}$ 或者 $T = \mathbb{Z}^+ \cup \{0, \infty\}$ 索引，满足

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t, \quad \forall s \leq t \leq \infty.$$

其中 $\mathscr{F}_\infty \triangleq \sigma\left(\bigcup_t \mathscr{F}_t\right) \subset \mathscr{F}$。称 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ 为一个带 *(滤子)* 流的概率空间 *(filtered probability space)*。

例子

考虑先后掷三次硬币这一随机过程，样本空间为

$$\Omega = \{000, 001, 010, 011, 111, 110, 101, 100\} = \{0, 1\}^3$$

样本点表示成 $\omega = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)$，事件域为 $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$.

掷 0 **次**：在掷硬币之前，我们只能确定所有的样本点是什么，但并不知道哪个样本点将出现。我们所能了解的信息仅仅是：

$$\text{必然事件 } \Omega \text{ 发生，不可能事件 } \emptyset \text{ 不发生，}$$

也就是说，这时我们能知道的事件域是

$$\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

例子

掷 1 **次**：虽然试验还未完成，我们不能预测具体某个样本点 ω 是否最终出现，但这时已经知道 ω 的部分“信息”。

若掷 1 次得到的结果是 $\omega_1=1$，那么我们知道事件“第一次是正面”发生，事件“第一次是反面”不发生，加上知道的必然事件和不可能事件，我们知道以下四个事件

$$
\begin{gathered}
\omega \in A_1=\{\text{第一次是正面}\}=\{111,110,101,100\}, \\
\omega \notin A_0=\{\text{第一次是反面}\}=\{000,001,010,011\}, \\
\omega \in \Omega, \\
\omega \notin \emptyset.
\end{gathered}
$$

同理，若掷 1 次得到的结果是 $\omega_1=0$，我们知道事件“第一次是正面”不发生，而事件“第一次是反面”发生，还知道必然事件和不可能事件，所以这时我们知道的事件域

$$
\mathscr{F}_1=\{\emptyset, A_1, A_0, \Omega\}.
$$

例子

掷 2 **次**：当第 1 次和第 2 次试验完成，若结果是 $\omega_1\omega_2 = 10$，那么我们知道以下六个事件的信息

$$\omega \in A_{10} = \{100, 101\}, \omega \notin A_{11} = \{110, 111\}, \omega \in \Omega,$$
$$\omega \notin A_{00} = \{000, 001\}, \omega \notin A_{01} = \{010, 011\}, \omega \notin \emptyset.$$

此外，我们知道 ω 是否属于这几个事件的交、并、对立事件，以及其交、并、对立事件再交、并和对立事件，即我们此时知道的事件域

$$\mathscr{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, A_1, A_0, A_{11}, A_{10}, A_{01}, A_{00}, A_{11}^c, A_{10}^c, A_{01}^c, A_{00}^c, A_{11} \cup A_{01}, A_{11} \cup A_{00}, A_{10} \cup A_{01}, A_{01} \cup A_{00}\}.$$

掷 3 次：当 3 次试验都完成后，我们知道 $\mathscr{F}_3 := \mathscr{F}$ 中所有事件的信息，即，对于任何 $A \in \mathscr{F}_3$，我们知道 A 是否发生。

适应过程

定义 12 (适应过程)

一个随机过程 $\{X_t\}$ 称为$\mathscr{F}_t$-适应过程 ($\mathscr{F}_t$-*adapted process*), 如果对于任意 t, X_t 是 $\mathscr{F}_t$-可测的。

$\sigma-$ 代数流

定义 13 (通常条件)

我们称带滤子流的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$ 满足通常条件 *(usual condition)*，如果

(1) 右连续性*:* $\forall t \geq 0, \mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+} := \bigcap_{\delta\downarrow 0} \mathscr{F}_{t+\delta}$.

(2) 完备性*:* $\mathscr{F}_0$ 包含所有的 P-零测集。

例 4 (自然 σ-代数流)

设 $X = \{X_t\}$ 为一随机过程, X 的自然 σ-代数流*(natural filtration)* 定义为

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t), \quad \mathscr{F}_\infty^X = \sigma(X_s, s \geq 0).$$

自然 σ-代数流是使得 X 适应的最小 σ-代数流.

总结

- 样本空间：包含了随机试验所有可能结果的集合；
- 事件域：事件、以及这些事件通过运算得到的事件的集合 (集族)；
- 概率：事件域上的函数，量化事件发生的可能性；
- 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$：建立了随机性的数学模型
- 随机变量：样本空间上的实值可测 $(\forall B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}), \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathscr{F})$ 函数；
- σ-代数流：递增的子事件域集合，刻画了过去和现在已知的信息。